تابع نمایی

نرگس عصارزادگان*

چکیده:

توابع نمایی در زمینه‌هایی چون اقتصاد و زیست‌شناسی کاربردهای فراوانی دارند. از این‌رو توابع نمایی و مسائل مربوط به رشد و زوال می‌توانند برای نمایش کاربردهای ریاضی در مسائل زندگی واقعی سودمند باشند. در این نوشته علاوه بر پیشنهادهایی برای تدریس فعالیت‌محور توابع نمایی، مثال‌هایی از کاربردهای تابع نمایی در دنیای واقعی ارائه می‌شوند که می‌توانند هنگام آموزش توابع نمایی مفید واقع شوند.

کلید واژه

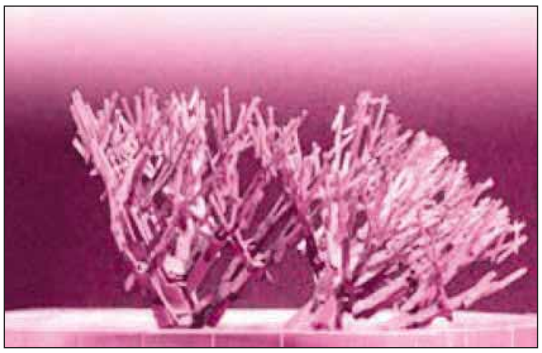
تابع نمایی، رشد و زوال تابع نمایی، کاربرد ریاضی در زندگی، مدل‌سازی داده‌ها

مقدمه

تابع $f(x)=a^x$ برای هر عدد حقیقی x و هر عدد حقیقی مثبت $a\neq 1$، یک تابع نمایی با پایهٔ a نامیده می‌شود. a یک عدد حقیقی مثبت در نظر گرفته می‌شود، چون برای مثال ریشهٔ دوم عددی چون ۱- یک عدد حقیقی نیست. همچنین پایه نمی‌تواند ۱ باشد، چون تابع ثابت $f(x)=1^x=1$ یک‌به‌یک نیست و وارون ندارد. توابع نمایی در مدل‌سازی داده‌هایی که مقدارشان افزایش یا کاهش سریع داشته باشند، مفیدند.

هنر و تابع نمایی

نجار هنرمندی که گاهی کارهای خلاقانه‌ای انجام می‌دهد، با استفاده از تعدادی انبرک، درختی چوبی ساخته است. به این ترتیب که روی دسته‌های انبرک اصلی، انبرک‌های دیگری ساخته و این کار را تا هشت سطح ادامه داده است [۱].



جدول ۱. تابع نمایی و هنر

سطح	تعدادانبرک‌ها	توان ۲
اصلی	۱	2^0
اول	۲=۱(۲)	2^1
دوم	۴=۲(۲)	2^2
سوم	۸=(۲) (۲)۲	2^3
چهارم	۱۶=(۲) (۲) (۲)۲	2^4
پنجم	۳۲=(۲) (۲) (۲) (۲)۲	2^5
ششم	۶۴=(۲) (۲) (۲) (۲) (۲)۲	2^6
هفتم	۱۲۸=(۲) (۲) (۲) (۲) (۲) (۲)۲	2^7
هشتم	۲۵۶=(۲) (۲) (۲) (۲) (۲) (۲) (۲)۲	2^8

به ستون آخر جدول ۱ نگاه کنید. چه رابطه‌ای بین توان‌ها و سطوح وجود دارد؟

سه فعالیت در رابطه با تابع نمایی

فعالیت‌های زیر را می‌توان در ابتدای تدریس تابع نمایی مطرح کرد. با انجام این فعالیت‌ها دانش‌آموزان خود می‌توانند الگوی تابع نمایی را برای دو حالت $a>1$ و $0<a<1$ به‌دست آورند.

فعالیت ۱:

گام اول: یک صفحه کاغذ را از وسط نصف کنید.

گام دوم: نصفه‌های کاغذ را روی هم قرار بدهید و دوباره از وسط نصف کنید. چند تکه کاغذ دارید؟

گام سوم: در جدول ۲ تعداد کاغذهای هر مرحله را ثبت کنید.

گام چهارم: برای این داده‌ها الگویی بنویسید و نمودار رسم کنید.

این الگو از چه تابعی پیروی می‌کند؟

فعالیت ۲:

گام اول: جدول جدیدی تشکیل دهید. این بار مساحت کاغذهای ایجاد شده در فعالیت ۱ را بنویسید، به شرط اینکه مساحت کاغذ اولیه ۱ باشد.

گام دوم: برای این داده‌ها الگویی بنویسید.

این الگو از چه تابعی پیروی می‌کند؟

جدول ۲. فعالیت ۱

تعداد برش‌ها	تعداد کاغذها
۰	۱
۱	
۲	
۳	
۴	
۵	
۶	

جدول ۳. فعالیت ۲

تعداد برش‌ها	مساحت ناحیه‌ها
۰	۱
۱	$\frac{۱}{۲}$ =۰/۵
۲	
۳	
۴	
۵	
۶	

فعالیت ۳: باکتری! باکتری! باکتری!

نوعی از باکتری‌ها، در شرایط مناسب، در هر زمان دو برابر می‌شوند. شما می‌توانید نوارهای کاغذی را برای نمایش رشد باکتری‌ها به‌کار برید تا رشد آن‌ها را مدل‌سازی کنید. حتی می‌توانید این فعالیت را برای باکتری‌هایی که در شرایط مناسب سه یا چهار برابر می‌شوند نیز به‌کار برید [۲].

نوارهای کاغذی را به ـــــــ تکهٔ مساوی ببرید.

چند تکه کاغذ دارید؟

هر تکه را به ـــــــ تکهٔ مساوی ببرید.

به‌کار بریدن تکه‌ها به تکه‌های مساوی ـــــــ برای تکمیل جدول ۴ ادامه دهید.

جدول ۴. فعالیت ۳

برش‌ها	قطعات کاغذ

نمودار داده‌های جدول را رسم کنید. محل برخورد با محور x و y را تعیین کنید.

آماده شوید تا یافته‌هایتان را ارائه دهید.

مثال‌هایی از دنیای واقعی: توابع نمایی را برای حل مسائل واقعی به‌کار ببرید!

تصاویر متحرک: اولین فیلم‌برداری موفق تصاویر متحرک به سال ۱۸۷۷ میلادی برمی‌گردد. امروزه صنعت تصاویر متحرک صنعت بسیار بزرگی است که سوددهی مالی بسیار زیادی دارد. فروش بلیت فیلم هر پایان هفته پس از افتتاح کاهش می‌یابد. تابع $E=۴۹/۹\times۰/۶۹۲^{W}$ تابع درآمد حاصل از فروش یک فیلم را مدل‌سازی می‌کند. در این معادله E درآمد را برحسب میلیون تومان و W تعداد پایان هفته‌ها را نشان می‌دهد [۱].

الف) یک جدول بسازید: در این مسئله چه مقادیری برای E معنادار هستند؟

(در این مسئله $E\leq ۴۹/۹$ و $W>۰$ معنادار است.)

ب) در پایان هفته اول درآمد چه‌قدر بوده است؟ (از ماشین‌حساب استفاده کنید.)

جدول ۵. تصاویر متحرک

E	W
۴۹/۹	۰
۳۴/۵۳۰۸	۱
۲۳/۸۹۵۳۱۳۶	۲
۱۶/۵۳۵۵۵۷	۳
۱۱/۴۴۲۶۰۵۴۵	۴
۷/۹۱۸۲۸۲۹۷	۵

ج) در پایان هفتهٔ پنجم فیلم چه‌قدر فروش داشته است؟

زیست‌شناسی: باکتری‌ها در هر ۲۰ دقیقه دو برابر می‌شوند. از یک عدد باکتری بعد از گذشت ۲ ساعت چه تعداد باکتری‌ها تولید می‌شود؟ در سایت ca.algebral.com گشتی بزنید!

بررسی رشد نمایی، ارسال نامهٔ الکترونیکی (E-mail)

در این فعالیت شما و هم گروهی‌هایتان می‌توانید نمودار درختی را برای حل مسئله به‌کار ببرید. یک نامهٔ الکترونیکی را برای سه نفر از دوستانتان می‌فرستید و به آن‌ها می‌گویید که آن‌ها هم نامه را برای سه نفر از دوستانشان ارسال کنند. این کار را تا چهار مرحله در نمودار درختی ادامه بدهید (به‌جای هر فرد یک نقطهٔ کوچک قرار دهید) و جدول ۶ را کامل کنید.

جدول ۶. نامهٔ الکترونیکی

دور	تعداد نامه‌های ارسال‌شده	اولین تفاوت‌ها	نسبت
۱			
۲			
۳			
٤			
۵			

حدس می‌زنید که در دور پنجم چند نامه فرستاده شود؟

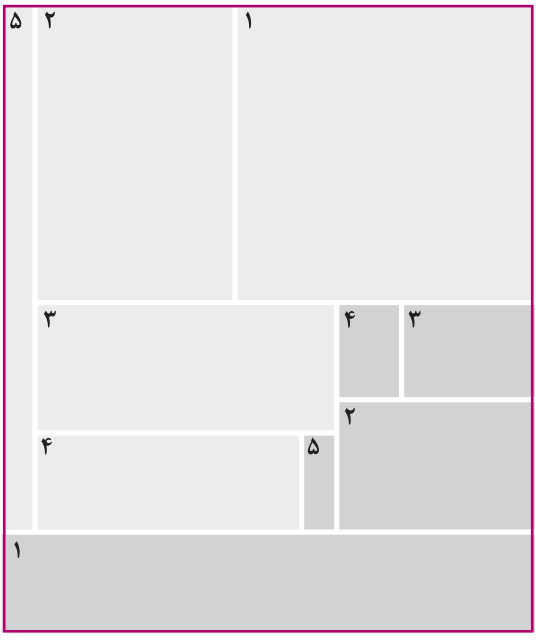
زیست‌شناسی: تابع $f(t)= ۱۰۰\times ۱/۰۵^t$ رشد جمعیت نوعی حشره را مدل‌سازی می‌کند. $f(t)$ نشانگر تعداد حشره‌ها و t نشانگر تعداد روزهاست [۳].

الف) در این مسئله چه مقادیری برای دامنه و برد قابل قبول است؟

ب) پس از دو هفته جمعیت حشره‌ها تقریباً چه‌قدر است؟

■ بررسی زوال نمایی: مفروش‌کردن یک سالن

یک هتل درجه یک تصمیم دارد با همکاری تیمی مجرب سالن بزرگ مستطیل شکل خود را مفروش کند. آن‌ها تصمیم گرفتند رنگ‌های خاکستری تیره و روشن را به‌کار ببرند تا سطح ۱۶ در ۱۰ متر سالن را به‌صورت زیر بپوشانند [۲].



دستورالعمل: با مقیاس ۱ سانتی‌متر برای ۱ متر و یک خط‌کش، طول حقیقی نواحی خاکستری تیره را اندازه بگیرید و نتایج را در جدول ۷ یادداشت کنید.

جدول ۷. رشد و زوال نمایی

نواحی خاکستری تیره (متر)				تفاضل‌های اولیه	نسبت
شمارهٔ ناحیه	طول	عرض	مساحت		
۱					
۲					
۳					
٤					
۵					

هر مرحله را برای همهٔ قسمت‌های خاکستری روشن تکرار کنید و اطلاعات خود را در جدول ۸ ثبت کنید.

جدول ۸. رشد و زوال نمایی

نواحی خاکستری روشن (متر)				تفاضل‌های اولیه	نسبت
شمارهٔ ناحیه	طول	عرض	مساحت		
۱					
۲					
۳					
٤					

تفاضل‌های اولیه را برای هر دو جدول مقایسه و نمودار رسم کنید.

موش و گربه: جزیره‌ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند با گربه‌ها به مقابله با موش‌ها بپردازند. در آن سال جمعیت موش‌ها ۲۳٬۵۷۶ بود که در پی مبارزه با آن‌ها این تعداد با نرخ ۲/۵ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه‌ها ۱۵٬۷۸۶ بود و با نرخ ۱/۸ درصد در سال رو به افزایش گذاشت. برای پاسخ‌گویی به سؤالات زیر فرض کنید هیچ عامل خارجی وجود نداشته باشد و این نرخ‌ها ادامه پیدا کنند [۲].

ـ یک جدول مقادیر و یک تابع نمایی برای جمعیت موش‌ها و یک جدول مقادیر و یک تابع نمایی برای جمعیت

گربه‌ها تشکیل دهید.

ـ در یک دستگاه هر دو نمودار را رسم کنید (مربوط به جمعیت موش‌ها و گربه‌ها).

ـ این دو نمودار چه تفاوتی دارند و چگونه به‌هم مربوط‌اند؟

ـ چه موقع جمعیت گربه‌ها بیشتر از جمعیت موش‌ها می‌شود؟

ـ چه موقع جمعیت گربه‌ها و موش‌ها یکی می‌شود؟

ـ اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه‌ها و موش‌ها چه اتفاقی می‌افتد؟

ـ در یک پاراگراف خلاصه‌ای از یافته‌های خود را در ارتباط با جمعیت موش‌ها و گربه‌ها بنویسید.

هنر: فکر می‌کنید تابع نمایی می‌تواند در هنر کاربرد داشته باشد؟ (می‌توانید به فراکتال‌ها بیندیشید!)

نتیجه‌گیری

در مجموعهٔ فعالیت‌های ارائه شده در این نوشته چند هدف دنبال شد:

نخست، ایجاد ارتباط بین بازنمایی‌های گوناگون تابع نمایی، همچون نمایش داده‌ها از طریق جدول مقادیر، نمودار و نمایش جبری.

دوم، جمع‌آوری داده‌هایی که می‌تواند به‌صورت رابطهٔ نمایی مدل‌سازی شود.

سوم، شرح برخی از ویژگی‌های تابع نمایی در ارتباط با کاربردهای آن در مسائل زندگی واقعی همچون مسائل زیست شناسی.

چهارم، بررسی رشد و زوال تابع نمایی، برای مثال از طریق ارائهٔ فعالیت‌هایی درخصوص رشد جمعیت.

منابع

1. California Algebra1, Concepts, Skills, and Problem Solving. Interactive student edition. Exponential functions. Copyright 2008. McGraw-Hill Company. USA. pp501-505.
2. Targeted Implementation and Planning Supports for Revised Mathematics. (TIPS4RM) Advanced functions (MHF4U), available from: www.OAME.oa.ca retrieved data: 1-10-2010.
3. Beecher J.A, Penna J.A. & Bittinger M.L. Exponential and Logarithmic function. (3ed, Addison Wesley, 2007). Copyright 2006 Pearson Education, Inc. Pp380-384.

* narges.assarzadegan@gmail.com

قوانین ریاضی، به همان نسبتی که واقعیت را بیان می‌کنند، مسلم و قطعی نیستند و به همان نسبتی که مسلم و قطعی هستند، حقیقت را بیان نمی‌کنند!
آلبرت اینیشتین